24. Hausübung zu den Rechenmethoden der Physik SS 2000

Abgabe am 5. 6. 2000 vor der Vorlesung

70. Maxwellgleichungen I

Welche Stromdichte führt auf ein elektrisches Feld der Form $\vec{E} = (f(y), 0, 0)$? Befragen Sie zur Lösung alle vier Maxwellgleichungen. (3)

71. Maxwellgleichungen II

Zwei unendlich dünne und unendlich ausgedehnte Kondensatorplatten sind senkrecht zur x-Achse bei $x = {}^{d}\!/_{2}$ und bei $x = -{}^{d}\!/_{2}$ aufgestellt. Die Ladungsdichte auf den Kondensatorplatten ändere sich in einer solchen Weise, dass für $t > 0$ im Innenraum ($|x| < {}^{d}\!/_{2}$) das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r}, t) = \alpha t \vec{e}_x$ erzeugt wird, d. h. der Kondensator wird gleichmäßig aufgeladen. Strom- und Ladungsdichte $\vec{j}$ seien nur auf den Kondensatorplatten von Null verschieden.

(a) Bestimmen Sie ($t > 0$) aus den Maxwellgleichungen ein Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r}, t)$ im Innenraum. Nutzen Sie die Invarianz des Problems unter Verschiebungen in der yz-Ebene, um andere Lösungen $\vec{B}$ zu erhalten. Wie unterscheiden sich diese? *Hinweis*: $\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{\omega} \times \vec{r}$ löst $\operatorname{rot} \vec{a} = \vec{\omega}$.

(b) Modifizieren Sie die Innenraum-Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ mit geeigneten θ-Funktionen, um für $t > 0$ eine im ganzen Raum gültige Lösung zu erhalten, bei der die Felder im Außenraum verschwinden. Lesen Sie nun aus den relevanten Maxwellgleichungen die Ladungsdichte ρ und die Stromdichte $\vec{j}$ ab und interpretieren Sie diese. *Hinweis*: $\vec{e}_x \times (\vec{e}_x \times \vec{r}) = \vec{r}_\perp$.

(c) Überprüfen Sie die Gültigkeit der Kontinuitätsgleichung. (5)

72. Ebene elektromagnetische Welle

In der Coulombeichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ löst $\phi \equiv 0$ die Maxwellgleichungen im Vakuum ($\rho = 0$, $\vec{j} = 0$). Das Vektorpotential $\vec{A}$ erfüllt dann die selbe Wellengleichung wie die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$, die sich gemäß $\vec{E} = -\frac{1}{c}\dot{\vec{A}}$ und $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$ aus dem Vektorpotential berechnen.

(a) Weisen Sie nach, dass $\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}_0 f(t - x/c)$ mit einem konstanten Vektor $\vec{A}_0$ und einer beliebigen skalaren Funktion f eine Lösung der Wellengleichung ist. In welche Richtung $\vec{n}$ (Einheitsvektor) breitet sich die Welle aus?

(b) Benutzen Sie die Produkt- und Kettenregel, um aus $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$ den Zusammenhang $\vec{B} = \vec{n} \times \vec{E}$ herzuleiten.

(c) Berechnen Sie sowohl den *Poyntingvektor* $\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\vec{E} \times \vec{B}$ als auch die Energiedichte $W = \frac{1}{8\pi}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2)$ und überprüfen Sie damit, ob $\vec{S} = cW\vec{n}$ erfüllt ist. Welche physikalische Aussage beinhaltet diese Gleichung? (4)